Mathematisches und Physikalisches Pendel M 6

1 Aufgabenstellung

1.1 Die Erdbeschleunigung g ist mit Hilfe eines Fadenpendels (mathematisches Pendel) zu bestimmen.

1.2 Die Erdbeschleunigung g ist mit Hilfe eines physikalischen Pendels zu bestimmen.

2 Physikalische Grundlagen

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der drehbar um eine Achse A, die nicht durch den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) geht, gelagert ist (Abb.1). Wird das Pendel aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ ausgelenkt, so ergibt sich ein rücktreibendes Drehmoment M:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi. \tag{1}$$

Dabei bedeuten: m = Masse des Pendels, s = Abstand Schwerpunkt-Drehachse, g = Erdbeschleunigung (9,81 m/s^2)
Die Bewegungsgleichung des schwingenden Pendels lautet:

$$M = J \cdot \ddot{\varphi} \tag{2}$$

wobei J das Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf die Drehachse A ist.
Aus (1) und (2) folgt

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi \tag{3}$$

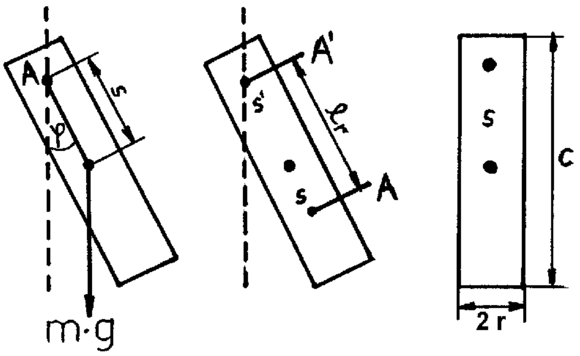

Abb.1 a - c: *Physikalisches Pendel*

und für kleine Winkel (φ < 6°)

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot s}{J} \cdot \varphi = 0 \tag{4}$$

die Differenzialgleichung einer harmonischen Schwingung.
Aus der Lösung dieser Differenzialgleichung ergibt sich die Schwingungsdauer T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}} \;. \tag{5}$$

Für ein mathematisches Pendel (ein Massepunkt mit der Masse m hängt an einem massenlosen Faden mit der Länge l) ist

$$J = m \cdot l^2 \quad \text{und} \quad s = l\,. \tag{6}$$

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist dann

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{7}$$

Als reduzierte Pendellänge l_r eines physikalisches Pendels bezeichnet man die Pendellänge eines mathematischen Pendels, das die gleiche Schwingungsdauer hat wie das entsprechende physikalische Pendel. Aus

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}\,. \tag{8}$$

ergibt sich

$$l_r = \frac{J}{ms}\,. \tag{9}$$

Lässt man das physikalische Pendel um eine Drehachse A' schwingen, die zur Achse A parallel ist und von ihr den Abstand l_r hat (siehe Abb.1b), so ergibt sich die gleiche Schwingungsdauer wie bei der Schwingung um A:

$$T' = T\,, \quad l_r' = l_r\,. \tag{10}$$

Beweis: J_0 bezeichne das Trägheitsmoment für die Drehachse durch den Schwerpunkt. Nach dem Satz von STEINER ist $J = J_0 + ms^2$ und somit $l_r = \frac{J}{ms} = \frac{J_0}{ms} + s$. Mit $l_r = s + s'$ ergibt sich daraus $s' = \frac{J_0}{ms}$ (*).

Analog ist für die Schwingung um den Drehpunkt A' $l_r' = \frac{J_0}{ms'} + s'$. Ersetzt man s' mit (*), so wird $l_r' = \frac{J_0 ms}{m J_0} + \frac{J_0}{ms} = l_r$.

Mit Hilfe der Gleichheit der Schwingungsdauer ist eine experimentelle Bestimmung der reduzierten Pendellänge möglich. Hierauf basiert das Reversionspendel, welches früher zur Präzisionsbestimmung von g benutzt wurde.
Bei bekannter Masseverteilung des physikalischen Pendels kann die reduzierte Pendellänge mit $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ aus (9) berechnet werden. Für einen homogenen zylindrischen Stab entsprechend Abb.1c ergibt sich:

$$l_r = \frac{3r^2 + c^2 + 12 \cdot s^2}{12 \cdot s}. \qquad (11)$$

3 Versuchsaufbau

3.0 Geräte:
- Fadenpendel(mathematisches Pendel)
- physikalisches Pendel
- Bandmaß
- Messschieber
- Stoppuhr

3.1 Das mathematische Pendel wird durch ein Fadenpendel annähend realisiert. Mit Hilfe einer verschiebbaren Einspannung können verschiedene Pendellängen eingestellt werden. Die absolute Messung der Pendellänge ist wegen der räumlichen Ausdehnung der Pendelkugel relativ ungenau, jedoch kann die relative Änderung der Pendellänge mit Hilfe einer Markierung an der Einspannung an einem fest angebrachten Metalllineal sehr genau abgelesen werden. Durch ein geeignetes Auswerteverfahren (siehe 5.2) kann damit eine hohe Genauigkeit bei der Bestimmung von g erzielt werden.

3.2. Als physikalisches Pendel wird ein Stab mit kreisförmigen Querschnitt verwendet, dessen Drehachse durch eine verschiebbare Schneide gebildet wird. Die Stabmitte (Schwerpunkt) und die Lage der ersten Drehachse (A in Abb.1b) sind durch einen eingravierten Ring markiert. Die Masse beträgt ca. 3,5 kg.

4 Versuchsdurchführung

4.1 Es werden mindestens fünf verschiedene Pendellängen des Fadenpendels eingestellt, die entsprechenden Stellungen der Einspannung auf der Skale abgelesen und die dazugehörigen Schwingungsdauern aus den Zeiten für jeweils 20 Schwingungen ermittelt. Dabei dürfen die maximalen Amplituden 6° nicht überschreiten.

4.2. Die Schneide des physikalischen Pendels wird zunächst auf die äußere Ringmarke eingestellt, der Abstand s_0 zwischen Drehachse und Schwerpunkt (d. h. zwischen beiden Ringmarken) bestimmt und die dazugehörige Schwingungsdauer T_0 aus der Zeit für 50 Schwingungen ermittelt.
Dann wird die Schneide auf der anderen Hälfte des Stabes befestigt und die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von s gemessen; s wird dabei in 5 cm Schritten von 10 bis 60 cm variiert. Zur Bestimmung von T werden die Zeiten für jeweils 20 Schwingungen gestoppt; die maximalen Amplituden dürfen nicht größer als 6° sein.
Der Durchmesser $2r$ des Stabes wird mit dem Messschieber gemessen und die Länge c (Abb.1c) mit dem Bandmaß.

5 Auswertung

5.1. Bezeichnet man den an der Einspannung abgelesenen Wert mit l_E, so ist die Pendellänge $l = l_E + h$, wobei h eine unbekannte Konstante ist. Mit Gl. (7) ist

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(l_E + h\right). \qquad (12)$$

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g wird das Quadrat der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von l_E graphisch dargestellt. Nach (12) ergibt dies eine Gerade mit dem Anstieg $4\pi^2/g$. Dieser wird mittels linearer Regression ermittelt und daraus die Erdbeschleunigung g berechnet.

5.2. Die Schwingungsdauer T des physikalischen Pendels wird in Abhängigkeit vom Abstand s zwischen Drehachse und Schwerpunkt grafisch dargestellt.
Aus dieser Darstellung wird der Abstand s' ermittelt, bei dem $T = T_0$ und $s' \neq s_0$ ist. Die reduzierte Pendellänge ist dann: $l_r = s_0 + s'$.
Die Erdbeschleunigung g wird mit Hilfe der Gleichung (8) bestimmt (mit $T = T_0$).
Die reduzierte Pendellänge l_r wird außerdem nach der Gleichung (11) berechnet, wobei $s = s_0$ gesetzt wird. Mit diesem Wert für l_r wird ebenfalls g aus (8) bestimmt.

Vergleichen Sie die auf verschiedenen Wegen ermittelten Werte der Erdbeschleunigung und deren Messunsicherheiten miteinander!

Zusatzaufgabe:
Mit Hilfe des STEINERschen Satzes wird aus Gleichung (5):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m\cdot s^2}{m\cdot g\cdot s}} = 2\pi\sqrt{\frac{c + s^2}{g\cdot s}} \qquad (13)$$

mit J_0 dem Trägheitsmoment für $s = 0$ und $c = J_0/m$ einer Konstante.
Bestimmen Sie g mit Hilfe von (13) durch nichtlineare Regression!

6 Literatur

W. Schenk, F. Kremer: Physikalisches Praktikum. Springer, 2014

Eichler, Kronfeld, Sahm: Das Neue Physikalische Praktikum, Springer, Berlin u.a. 2006

Bergmann-Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Bd.1 Mechanik, Akustik, Wärme. de Gruyter, Berlin u.a., 2008

7 Kontrollfragen

7.1 Warum soll die Auslenkung des Pendels nicht größer als 6° sein?

7.2 Wie wird das Trägheitsmoment eines starren Körpers für eine beliebige Drehachse berechnet?

7.3 Wie ist ein Reversionspendel aufgebaut?