

Millikan-Versuch

E 19

1 Aufgabenstellung

1.1 Die Variationsbreite der Tröpfchenradien und Ladungen ist zu untersuchen.

1.2 Die elektrische Ladung von mindestens 40 geeigneten Öltröpfchen ist zu bestimmen. Aus den Ergebnissen ist die Elementarladung zu ermitteln.

2 Physikalische Grundlagen

Die Größe der Elementarladung e wurde 1910 erstmals präzise von ROBERT ANDREWS MILLIKAN mit der nach ihm benannten Öltröpfchenmethode bestimmt. Unter anderem für diese Arbeit erhielt MILLIKAN 1923 den Nobelpreis.

2.1 Befindet sich ein geladenes Öltröpfchen (Radius r , Masse m , Ladung q) zwischen den Platten eines Kondensators in einem vertikal gerichteten elektrischen Feld, so wirken folgende Kräfte: die Schwerkraft und die Auftriebskraft (die zusammengefasst werden können), die Reibungskraft und die elektrische Kraft.

Der Einheitsvektor \vec{k} zeige nach oben in Richtung der vertikalen Koordinatenachse. Dann ist die vektorielle Summe aus Schwerkraft und Auftrieb

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{öl}} - \rho_L)g \cdot \vec{k}. \quad (1)$$

Dabei ist g die Fallbeschleunigung, ρ und ρ_L sind die Dichten von Öl und Luft.

Die Reibungskraft ist nach STOKES gleich

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v}, \quad (2)$$

wobei im Versuch η die Viskosität der Luft ist und \vec{v} die Geschwindigkeit des Öltröpfchens. Abhängig von der elektrischen Kraft kann \vec{v} nach oben oder nach unten gerichtet sein.

Die durch das elektrische Feld \vec{E} auf die Ladung q ausgeübte Kraft ist

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}, \quad (3)$$

wobei die Ladung q positiv oder negativ sein kann.

Die Sink- bzw. Steig-Geschwindigkeit eines geladenen Öltröpfchens im Kondensator ergibt sich aus der Bedingung

$$\vec{F}_G + \vec{F}_A + \vec{F}_R + \vec{F}_E = 0. \quad (4)$$

Da neben der Ladung q auch der Tröpfchenradius r unbekannt ist, sind für die Ermittlung der Ladung zwei unabhängige Messungen an einem Tröpfchen nötig.

Im Folgenden bedeuten $v = |\vec{v}|$ und $qE = |\vec{F}_E|$ die (positiven) Beträge der Vektoren.

2.2 Bei der Sink-Steig-Methode ergeben sich Radius und Ladung eines ausgewählten Tröpfchens aus zwei gemessenen konstanten Geschwindigkeiten dieses Tröpfchens: einer Sinkgeschwindigkeit v_1 ohne elektrisches Feld und einer Steiggeschwindigkeit v_2 bei nach oben gerichteter elektrischer Kraft.



Abb. 1: Feldkraft (gestrichelt), Reibungskraft (punktiert) und um den Auftrieb verminderte Schwerkraft für ein sinkendes und steigendes Öltröpfchen im Plattenkondensator.

Entsprechend der Abb.1 gilt für das Kräftegleichgewicht beim vertikalen Sinken und Steigen des Tröpfchens:

$$-\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{Öl}}-\rho_L)g + 6\pi\eta r v_1 = 0 \quad (5)$$

$$qE - \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{Öl}}-\rho_L)g - 6\pi\eta r v_2 = 0 \quad (6)$$

Aus (5) ergibt sich für den Tröpfchenradius

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2(\rho_{\text{Öl}}-\rho_L)g}} \quad (7)$$

Aus (5) und (6) folgt für die elektrische Ladung

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_1 + v_2)}{E}, \quad (8)$$

wobei das elektrische Feld E gemäß $E = U/d$ aus der Spannung U und dem Plattenabstand d berechnet wird.

Zwei alternative Methoden zur Bestimmung von r und q verwenden

- (i) die Messung einer Sink- und einer Steiggeschwindigkeit bei gleichgroßen elektrischen Feldern entgegengesetzter Polarität und
- (ii) die Messung der Sinkgeschwindigkeit ohne Feld und die Messung der Feldstärke bzw. Spannung, bei der die Geschwindigkeit Null wird (Schwebemethode).

2.3 CUNNINGHAM-Korrektur:

Das STOKESSche Reibungsgesetz Gl. (2) gilt exakt für ein kontinuierliches Medium. Diese Bedingung wird verletzt, wenn der Tröpfchenradius in die Größenordnung der mittleren freien Weglänge λ der Luftmoleküle kommt. Zwischen dem Tröpfchen und den daran stoßenden Gasmolekülen besteht ein gewisser Schlupf - die Reibung ist kleiner als nach Stokes. CUNNINGHAM hat 1910 mit Hilfe theoretischer Überlegungen zur Impulsübertragung eine Korrektur des STOKESSchen Gesetzes in der Form

$$F_R = \frac{6\pi\eta r v}{1 + A \cdot \frac{\lambda}{r}} \quad (9)$$

angeben, welche nach einer genaueren Analyse von KNUDSEN und WEBER 1911 für $\lambda/r <$

0,25 gültig ist.

MILLIKAN hat in seinem 1911 in Phys. Rev. erschienen Artikel die selbe Gleichung (mit einem etwas anderen Wert für A) benutzt, die er unabhängig von CUNNINGHAM auf empirischem Weg gefunden hatte. Er hat noch bis 1923 an der Verbesserung der Öltröpfchenmethode gearbeitet und dabei den Wert der Konstanten A genauer bestimmt ($A=0,86$ bei $\lambda \approx 0,094\mu\text{m}$).

Die nach (7) und (8) berechneten unkorrigierten Radien und Ladungen der Tröpfchen werden im Folgenden mit r_0 und q_0 bezeichnet. Der Nenner in (9) wird mit der Abkürzung $B = A \cdot \lambda$ zu $(1 + B/r)^{-1}$. Fügt man diesen Korrekturfaktor in Gl. (7) ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für den exakten Tröpfchenradius r mit der Lösung

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{B^2}{4}} - \frac{B}{2} \quad (10)$$

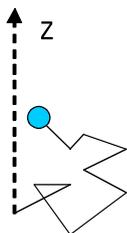
Die exakte Ladung ergibt sich aus (8) durch Einfügen des Korrekturfaktors zu

$$q = q_0 \cdot \left(1 + \frac{B}{r}\right)^{-1,5} \quad (11)$$

Auch in jüngerer Zeit gibt es noch Veröffentlichungen zur Cunningham-Korrektur in Zusammenhang mit der Klimaforschung (Transport von Aerosolen in der Atmosphäre). Beim Vergleich moderner Daten mit den alten Veröffentlichungen muss man berücksichtigen, dass die mittlere freie Weglänge λ eine abstrakte, modelabhängige Größe ist, die heute anders berechnet wird als früher. Luft ist ein Gasgemisch, die Moleküle haben eine komplexe Gestalt und es gibt Wechselwirkungen zwischen ihnen. λ wird aus Messwerten der Viskosität in einem Modell berechnet, welches die Kräfte zwischen den Gasmolekülen nach dem jeweiligen Stand der Theoriebildung berücksichtigt. Heute gilt $\lambda \approx 0,068\mu\text{m}$, das Produkt $A \cdot \lambda$ hat jedoch etwa den gleichen Wert wie bei Millikan.

2.4 Im Versuch wird die Vertikalbewegung der Tröpfchen durch deren zufällige Brownsche Bewegung (siehe Abb.2) überlagert.

Abb. 2:
Brownsche Bewegung
eines Tröpfchens in der
Zeit t , beginnend bei
 $z = 0$.



Nach EINSTEIN nimmt der mittlere vertikale Abstand σ_z eines Tröpfchens vom Anfangsort entsprechend

$$\sigma_z = \sqrt{2Dt} \quad (12)$$

mit der Quadratwurzel der Zeit zu. Hierbei ist

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r} \quad (13)$$

der Diffusionskoeffizient der Tröpfchen, k die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur in Kelvin.

Die Messung der Sink- und Steiggeschwindigkeit ist wegen der Brownschen Bewegung (und weiterer Fehlerquellen) nur mit einer deutlichen statistischen Unsicherheit $u(v)$ möglich. Wird v aus der für eine vorgegebene Strecke z benötigte Zeit t ermittelt, so ist

$$\frac{u(v)}{v} > \frac{\sigma_z}{z}. \quad (14)$$

Die Unsicherheit von v_1 bzw. (v_1+v_2) in (7) und (8) bewirkt eine relativ große Streuung der berechneten Ladungen. Eine genaue Bestimmung der Elementarladung ist nur möglich mittels statistischer Auswertung der Messdaten von vielen Tröpfchen. Dabei müssen für die Messung möglichst solche Tröpfchen ausgewählt werden, die nur wenige Elementarladungen e tragen. Bei zu großen Tröpfchenladungen wird die statistische Unsicherheit der Ladung $u_s(q) > e$ und es ist nicht mehr möglich, einem Tröpfchen eine bestimmte Ladungszahl zuzuordnen.

Aus (12-14) ist außerdem ersichtlich, dass die Streuung der Messwerte durch die Brownsche Bewegung geringer wird mit größerer Messstrecke z ($\sigma_z \sim t^{1/2}$, $z \sim t$) und mit größerem Tröpfchenradius ($\sigma_z \sim r^{-1/2}$, $v_1 \sim r^2$).

3. Versuchsaufbau

3.0 Geräte:

- Millikan-Gerät mit Plattenkondensator, Messmikroskop und Zerstäuber
- Millikan-Betriebsgerät
- Sensor-Cassy, 2 Timer-Boxen, Cassy-Display
- Polwender
- Verbindungsleitungen

3.1 Das Objektiv des Messmikroskops vergrößert 2-fach, die Okularmessplatte besitzt ein quadratisches Raster mit der Rastereinheit 0,5 mm. Eine Strecke von 1 mm entspricht daher 4 Rastereinheiten (Genauigkeit 0,5%). Der Abstand zwischen den Kondensatorplatten beträgt $(6 \pm 0,02)$ mm.

Mit Hilfe der am Versuchsplatz ausliegenden Gebrauchsanleitung werden Plattenkondensator und Beleuchtungseinrichtung an das Millikan-Betriebsgerät angeschlossen. Zwischen Kondensator und Betriebsgerät wird der Polwender geschaltet.

Mit den beiden Kanälen des Cassys werden die Zeiten bei eingeschalteter und bei ausgeschalteter Spannung U gemessen. Hierzu ist der Zeitmessausgang 1 des Betriebsgerätes mit Eingang E und \perp der Timer-Box auf Input B des Sensor-Cassys zu verbinden. Der Zeitmessausgang 2 wird ebenso mit der Timer-Box auf Input A verbunden. An den beiden Anzeigen des Cassy-Displays ist die Messgröße „s ΔE “ (Zeitdifferenz in s an Timer E) einzustellen.

Der Ölzerstäuber soll so weit gefüllt sein, dass das gebogene Kapillarrohr ca. 2 mm im Öl steht. Die Aussprühöffnung des Zerstäubers muss sich vor den beiden Bohrungen in der Acrylglasabdeckung des Kondensators befinden. Unter diesen Umständen genügen pro Messung wenige Pumpvorgänge, um Öltröpfchen in den Kondensator zu stäuben. Beim Zerstäuben wird ein Teil der Öltröpfchen elektrisch aufgeladen.

4. Versuchsdurchführung

Einzelne Öltröpfchen werden beobachtet. Durch Ein- und Ausschalten oder Variieren des elektrischen Feldes (eventuell umpolen!) lassen sich die Tröpfchen so dirigieren, dass sie im Gesichtsfeld bleiben. Dabei ist zu beachten, dass die scheinbare Bewegungsrichtung durch das Mikroskop umgekehrt wird.

4.1 Um ein „Gefühl“ für die Auswahl geeigneter Tröpfchen zu bekommen, soll zunächst die Variationsbreite ihrer Größe und ihrer Ladung untersucht werden. Dafür wählt man eine kleinere Messstrecke von z.B. $z = 1$ mm. Radius und Ladung der Tröpfchen sind in einem vorbereiteten Arbeitsblatt in Origin, Excel oder Calc oder in CassyLab sofort nach jeder Messung zu berechnen (siehe 5.).

Ohne elektrisches Feld werden je ein bis zwei besonderes langsame (d.h. kleine) und besonders schnelle (d.h. große) Tröpfchen ausgewählt. Deren Fallzeit t_1 ohne Feld und Steigzeit t_2 mit elektrischem Feld ist zu messen. Die Spannung wird dabei so eingestellt, dass sich leicht messbare Zeiten ($10\text{ s} \leq t_2 \leq 30\text{ s}$) ergeben. Anschließend sucht man unter ähnlich großen Tröpfchen je ein bis zwei solche aus, die sich im elektrischen Feld besonders langsam (schwach geladen) und besonders schnell (stark geladen) bewegen und misst ebenfalls t_1 und t_2 .

4.2 Führen Sie die Messungen wie in 4.1 beschrieben an etwa 40 Öltröpfchen durch. Je mehr Messungen ausgewertet werden können, desto genauer wird das Ergebnis! Wählen Sie für die Messungen nur Tröpfchen aus, bei denen Sie eine kleine Ladung vermuten. Für eine hohe Messgenauigkeit sollte die Messstrecke $z = 1,5 \dots 2$ mm betragen. Die Sink- und die Steigzeit, die Messstrecke und die Kondensatorspannung ist zu protokollieren.

5. Auswertung

Die Berechnung der Tröpfchenradien und -Ladungen muss sofort während der Messung erfolgen. Um mehr Zeit für Messungen zu haben, bereiten Sie schon zu Hause in Origin, Excel oder Calc ein Arbeitsblatt für diese Rechnung vor!

Für die Berechnungen sind folgende bei 25°C , 1000 mbar und 30% Luftfeuchtigkeit gültigen Werte zu verwenden:

$$\rho_{\text{Öl}} = 0,875 \text{ g cm}^{-3} \quad \rho_L = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$$

$$\eta = 1,843 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$$

$$\lambda = 0,0678 \text{ } \mu\text{m} \quad A = 1,252$$

(Quelle für η , λ , A : JENNINGS 1988; $\rho_{\text{Öl}}$: eigene Messung)

Für jedes Tröpfchen sind zu berechnen:

- die Sink- und die Steiggeschwindigkeit $v_1 = z/t_1$ und $v_2 = z/t_2$
- der unkorrigierte Tröpfchenradius r_0 nach Gl. (7) und die unkorrigierte Ladung q_0 nach Gl. (8)
- der exakte Tröpfchenradius r nach Gl. (10) und die exakte Ladung q nach Gl. (11).

5.1 Die maximalen und minimalen beobachteten Tröpfchenradien und -ladungen sind anzugeben. Die Verhältnisse σ_z/z sind m.H. von (12) zu berechnen und zu diskutieren.

5.2 Die Ergebnisse werden in einem Histogramm dargestellt, das die Anzahl der Tröpfchen pro Ladungsintervall angibt. Die Klassenbreite ist so zu wählen, dass eine Häufung in der Nähe von Vielfachen der Elementarladung sichtbar wird (siehe auch Versuch M17, Statistische Auswertung).

Ordnen Sie, soweit möglich, mit Hilfe des Histogramms jedem Tröpfchen eine ganze Anzahl n von (vermuteten) Elementarladungen zu und bestimmen Sie die Größe der Elementarladung als Mittelwert aller Quotienten q/n .

Fakultativ: Versuchsdurchführung und Auswertung mit CassyLab

Alternativ zur Verfahrensweise in dieser Versuchsanleitung können alle Messungen zu 4.2 auch mit dem Programm CassyLab2 durchgeführt werden. Die Messwerterfassung und Auswertung geschieht dann weitgehend automatisch in CassyLab2, was erheblich Zeit spart. Dies wird im Praktikum nur bei entsprechender Vorbereitung gestattet.

Zur Vorbereitung installieren Sie das Programm (download von www.ld-didactic.de) auf dem eigenen Computer und studieren das Versuchsbeispiel "Millikan-Versuch" in der Online-Hilfe. Bereiten Sie Ihr Protokoll entsprechend der Versuchsanleitung in der CassyLab-Hilfe vor. Beachten Sie, dass sich der Versuchsaufbau etwas von Abschnitt 3 dieser Anleitung unterscheidet. Ändern Sie die vorgegebenen Werte für $\rho_{\text{Öl}}$, η_0 und $B=\lambda A$ (in CassyLab A genannt), so dass sie mit den oben angegebenen Werten übereinstimmen. Bestimmen Sie wie in 5.2 die Elementarladung als Mittelwert über alle auswertbaren Messungen.

6. Literatur

Bergmann, Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 2, Verlag Walter de Gruyter, Berlin 2004

W. Schenk, F. Kremer: Physikalisches Praktikum. Springer 2014

Millikan R. A. (1911) *Phys. Rev.* **32**, 349

Cunningham, E. (1910) *Proc. R. Soc.* **83**, 357.

Allen, M. D. and Raabe, O. G. (1982) *J. Aerosol Sci.* **13**, 537.

Jennings, S.G. (1988) *J. Aerosol Sci.* **19**, 159

Alle Originalarbeiten liegen im Praktikum vor. Die Arbeit von Millikan beschreibt alle Details des Experiments und ist ein Lehrbeispiel für die Arbeitsweise eines gewissenhaften Experimentators. Sie erschließt sich noch besser mit Hilfe des Artikels von Allen und Raabe 1982, welche Millikans Messungen aus moderner Sicht betrachten, neu auswerten und dabei auch spätere, genauere Ergebnisse Millikans berücksichtigen.

7 Kontrollfragen

7.1 Wie lauten die Beziehungen für r und q bei Anwendung der Schwebemethode?

7.2 Wie ist die Viskosität definiert und wie hängt sie bei Gasen und Flüssigkeiten qualitativ von der Temperatur ab?

7.3 Welchen Einfluss haben Tröpfchengröße und Messstrecke auf die Messgenauigkeit?

7.4 (wenn Sie Millikan 1911 gelesen haben) Was sind die Unterschiede zwischen unserem Experiment und dem von Millikan? Welche zusätzlichen Maßnahmen hat er getroffen, um die Messgenauigkeit zu verbessern?