

RC-Glied

E 22

1 Aufgabenstellung

Die Zeitkonstanten von RC-Gliedern sind zu bestimmen:

- 1.1 aus der Entladung eines Kondensators,
- 1.2 aus dem Frequenzverhalten der RC-Glieder und
- 1.3 aus ihrem Impulsverhalten.

2 Grundlagen

Die Wirkungsweise eines RC-Gliedes ist von grundlegender Bedeutung für das Verständnis elektrophysiologischer Vorgänge. Eine Zellmembran (Lipid-Doppelschicht) ist ein sehr guter Isolator, im Intra- und Extrazellulärraum befinden sich dagegen gut elektrisch leitfähige Elektrolyte. Die Zellmembran verhält sich daher elektrisch wie ein Kondensator mit der Kapazität C . Ionenkanäle in der Zellmembran lassen gezielt Ladungsträger (z. B. Na^+ , K^+ , Cl^-) passieren, hierdurch besitzt die Membran einen (steuerbaren) elektrischen Widerstand R parallel zur Kapazität C .

Die Reizwahrnehmung und Reizleitung beruht auf einer Veränderung der Potentialverhältnisse an der Zellmembran durch Ionenströme. Wichtige Parameter wie Reizschwelle, Reichweite eines elektrotonischen Potentials und die Geschwindigkeit der Weiterleitung werden durch die Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ (siehe unten) bestimmt.

Das RC-Glied als Reihenschaltung eines Kondensators mit einem Widerstand spielt eine wichtige Rolle als grundlegendes Filterelement (Hochpass, Tiefpass) in analogen elektronischen Schaltungen (z.B. Verstärker) und begrenzt die Geschwindigkeit bei der digitalen Signalverarbeitung.

2.1 Wechselspannung und Wechselstrom:

Sinusförmige Wechselspannungen U und -ströme I lassen sich mathematisch einfach als

harmonische Schwingung darstellen:

$$U = \hat{U} \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$I = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

mit \hat{U} und \hat{I} als Spitzenwerte von Spannung und Strom (siehe Abb.1).

Für die Kreisfrequenz ω gilt die Beziehung

$$\omega = 2 \pi f = \frac{2 \pi}{T} \quad (3)$$

(f : Frequenz, T : Periodendauer). Der Winkel φ stellt die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung dar.

Wechselspannungen beliebiger Form (u.a. Biologische Potentiale) lassen sich nach dem Fourier-Theorem in eine Reihe von sinusförmigen Teilspannungen entwickeln (Fourieranalyse). Damit lassen sich alle Aussagen sowie der mathematische Formalismus zu sinusförmigen Spannungen auch auf Spannungssignale beliebiger Form anwenden.

Um die Größe von Wechselspannungen und -strömen anzugeben, wird meist der Effektivwert (englisch rms-Wert, von root mean square) benutzt, da sich U und I ja ständig ändern. Der Effektivwert I_{eff} ist die Stärke eines fiktiven Gleichstromes, der im zeitlichen Mittel die selbe Leistung P erzeugt wie der Wechselstrom. Mit

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = I^2(t) \cdot R \quad (4)$$

berechnet man den Mittelwert durch Integration über eine Periode:

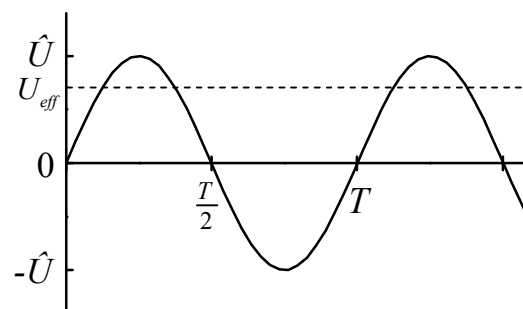


Abb.1: Sinusförmige Wechselspannung

$$\bar{P} = I_{eff}^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt \quad (5)$$

Für einen sinusförmigen Strom entsprechend Gl. (2) ergibt sich daraus

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Analog ist der Effektivwert einer sinusförmigen Spannung (1)

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

2.2 Kapazität im Gleichstromkreis:

Zwischen der Kapazität C , der Spannung U und der Ladung Q besteht der Zusammenhang:

$$Q = C \cdot U \quad (8)$$

Die SI-Einheit der Kapazität ist $[C] = As/V = F$ (Farad).

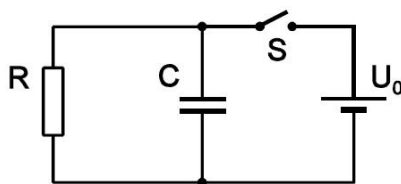


Abb.2: Schaltung zur Entladung eines Kondensators

Wie in Abb.2 gezeigt, werde an einen Kondensator C eine Gleichspannung U_0 angelegt, wobei der Schalter S geschlossen sei. Wird der Schalter nun geöffnet, so entlädt sich der Kondensator über den Widerstand R . Der Entladestrom und die Spannung U am Kondensator sinken dabei exponentiell (siehe Abb.3), wie folgende Überlegung zeigt:

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel für den linken Kreis in Abb.2 ist die Summe der Spannungen an Kondensator und Widerstand gleich Null, das heißt

$$I \cdot R + \frac{Q}{C} = 0 \quad (9)$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit und berücksichtigt man die Beziehung

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (10)$$

ergibt sich daraus die Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = 0 \quad (11)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die Exponentialfunktion

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (12)$$

mit dem Anfangsstrom I_0 bei $t = 0$.

Wegen $U = I \cdot R$ gilt für die Spannung ein ebensolches Zeitgesetz:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (13)$$

Die Kombination einer Kapazität C mit einem OHMSchen Widerstand R nennt man RC-Glied. Das Produkt $R \cdot C$ hat die Dimension einer Zeit und wird als Zeitkonstante τ des RC-Gliedes bezeichnet:

$$\tau = R \cdot C \quad (14)$$

Nach dem Öffnen des Schalters sinkt die Spannung U in der Zeitspanne τ von U_0 auf $1/e \cdot U_0 \approx 0,37 \cdot U_0$, siehe Abb.3.

Die Zeitkonstante kann man einfach messen, indem man die Zeit $t_{1/2}$ bestimmt, nach der die Spannung U auf die Hälfte abgesunken ist. Aus Gl. (13) ergibt sich:

$$\frac{U_0}{2} = U_0 \cdot e^{-\frac{t_{1/2}}{RC}} \quad (15)$$

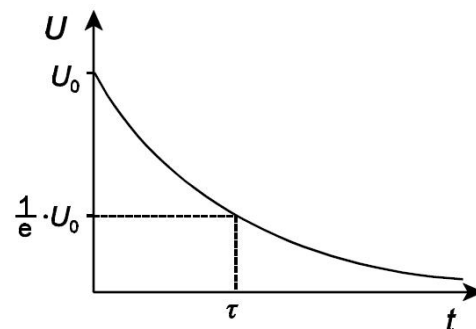


Abb.3: Zeitlicher Verlauf der Spannung beim Ausschaltvorgang am RC-Glied

Daraus folgt für die Zeitkonstante τ :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}. \quad (16)$$

2.3 Kapazität im Wechselstromkreis:

In einem Wechselstromkreis (Abb. 4) wird der Kondensator periodisch geladen und wieder entladen.

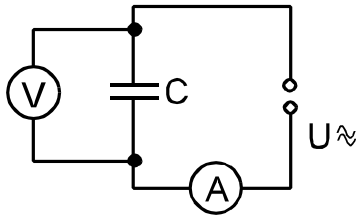


Abb.4: Kondensator im Wechselstromkreis

Für den Strom folgt aus (10), wenn man (8) und (1) einsetzt:

$$I = \frac{d}{dt} (C \cdot \hat{U} \cdot \sin \omega t) \quad (17)$$

$$I = \omega \cdot C \cdot \hat{U} \cdot \cos \omega t.$$

Durch Vergleich mit (2) sieht man, dass der Strom gegenüber der Spannung um $\varphi = 90^\circ$ phasenverschoben ist (der Strom geht der Spannung voraus), und dass der maximale Strom (Spitzenwert)

$$\hat{I} = \omega \cdot C \cdot \hat{U} \quad (18)$$

beträgt. Bildet man den Quotienten aus den Maximalwerten von Spannung und Strom (oder auch aus den Effektivwerten), so erhält man den Wechselstromwiderstand Z_C des Kondensators, auch Impedanz oder Scheinwiderstand genannt:

$$Z_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad (19)$$

Die Impedanz des Kondensators ist frequenzabhängig, sie nimmt mit wachsender Frequenz ab. Der Begriff Scheinwiderstand kommt daher, dass an ihm keine Wärme entsteht wie an einem „richtigen“ (ohmschen) Widerstand. Durch die Phasenverschiebung von 90° zwischen Strom und Spannung ist die mittlere Leistung an einem rein kapazitiven Scheinwiderstand Z_C gleich Null.

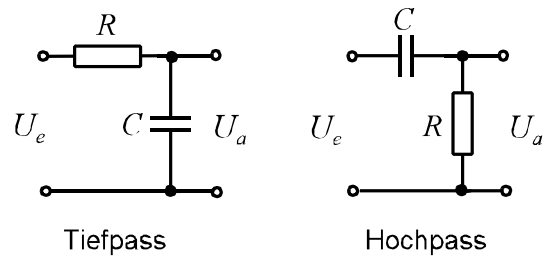


Abb.5: Hoch- und Tiefpass

Ein RC-Glied im Wechselstromkreis kann man auch als einen Spannungsteiler auffassen (siehe Abb.5), der aus einem konstanten Widerstand R und einem frequenzabhängigen (Wechselstrom-) Widerstand $Z_C = 1/\omega C$ besteht. Dabei ergibt sich ein frequenzabhängiges Spannungsteilverhältnis. Die Gesamtspannung über beiden Teilwiderständen nennt man Eingangsspannung U_e , den Spannungsabfall über einem Teilwiderstand Ausgangsspannung U_a .

Wegen des Frequenzverhaltens von U_a (Abb.6) bezeichnet man ein RC-Glied auch als Tiefpass, wenn als Ausgangsspannung der Spannungsabfall über dem Kondensator verwendet wird, und als Hochpass, wenn der Spannungsabfall über dem OHMschen Widerstand benutzt wird.

Das Frequenzverhalten ist leicht zu verstehen, wenn man sich in Abb.5 vor Augen hält, dass der Wechselstromwiderstand des Kondensators für kleine Frequenzen ($\omega \rightarrow 0$) praktisch unendlich groß und für sehr große Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) praktisch Null wird. Im 1. Fall fällt die gesamte Spannung am Kondensator ab, im 2. Fall am Widerstand.

Bei der Kreisfrequenz $\omega_g = 1/\tau$ ist nach (19) und (14) $Z_C = R$. Die zugehörige Frequenz

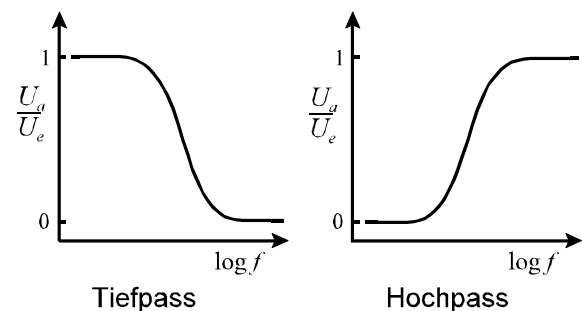


Abb.6: Frequenzverhalten eines RC-Gliedes

$$f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (20)$$

heißt Grenzfrequenz des RC-Gliedes. In diesem Fall ergibt sich sowohl für den Hoch- als auch für den Tiefpass $U_a/U_e = 1/\sqrt{2}$.

3 Versuchsaufbau

3.0 Geräte

- Stromversorgungsgerät HM7042
- Vielfachmesser MetraMax 2
- Funktionsgenerator HM8130
- Oszilloskop (siehe Anhang)
- Stoppuhr
- Schalttafel mit RC-Glied für Aufgabe 1
- Rastersteckplatte, 2 Kondensatoren und 1 Widerstand (steckbar) für Aufgaben 2&3
- Verbindungsleitungen

3.1 Die Schaltung zur Entladung eines Kondensators ist auf der Schalttafel fertig aufgebaut (Abb.7). Wegen der besonderen Bauform des Kondensators (Elektrolytkondensator) muss auf die richtige Polarität geachtet werden.

3.2 und **3.3** Die RC-Glieder werden entsprechend Abb.8 auf einer Steckplatte aufgebaut. Der Funktionsgenerator liefert eine sinusförmige (für 3.2) bzw. rechteckförmige (für 3.3) Wechselspannung. Mit dem Oszilloskop wird die Größe bzw. der zeitliche Verlauf der Wechselspannung gemessen.

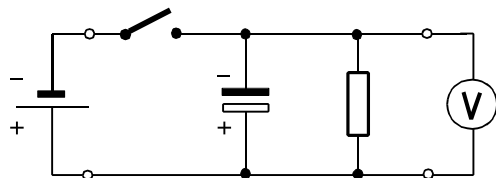


Abb.7: Schaltung zur Entladung eines Kondensators

4 Versuchsdurchführung

Notieren Sie für alle verwendeten Kondensatoren und Widerstände die aufgedruckten Werte im Protokoll!

4.1 Stromversorgungsgerät und Spannungsmesser sind anzuschließen; es wird eine Spannung von 10 V verwendet.

Durch Schließen des Schalters wird der Kondensator aufgeladen. Öffnet man den Schalter, so beginnt die Entladung des Kondensators über den Widerstand. Mit einer Stoppuhr wird 5 mal die Zeit gemessen, bei der die Spannung am Kondensator auf die Hälfte abgesunken ist.

4.2 Bei den Versuchen 4.2 und 4.3 sind drei RC-Glieder auszumessen. Dazu wird erst Kondensator 1, dann Kondensator 2 und dann eine Parallelschaltung der beiden Kondensatoren in die Schaltung eingesetzt.

Am Funktionsgenerator wird eine sinusförmige Wechselspannung $U_{SS} \approx 8\text{ V}$ eingestellt (Der Generator zeigt die "Spitze-Spitze-Spannung" $U_{SS} = 2\hat{U}$ an). Als Frequenz wird zunächst etwa 1 kHz gewählt. Mit dem Oszilloskop ist die Eingangsspannung U_e entsprechend Abb.8a zu messen. Anschließend wird mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung U_a angezeigt (Abb.8b) und am Generator die Frequenz so verändert, dass $U_a = U_e/\sqrt{2}$ wird. Die gefundene Frequenz (Grenzfrequenz) ist zu protokollieren.

Der Messbereich des Oszilloskops ist hierbei so zu wählen, dass U_e und U_a gut ablesbar sind. Die Einstellung der x-Ablenkung (Zeit-

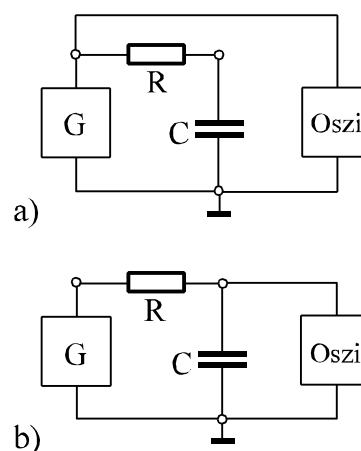


Abb.8: Schaltung für die Messungen am RC-Glied für: a) Eingangsspannung U_e , b) Ausgangsspannung U_a

maßstab) ist für diese Messung ohne Bedeutung; man wählt eine Einstellung, die ein bequemes Ablesen der Amplitude ermöglicht.

4.3 Am Funktionsgenerator wird eine Rechteck-Spannung ausgewählt, $f = 1$ kHz und $U_{SS} = 8$ V eingestellt. Mit dem Oszilloskop wird zuerst die Eingangsspannung (Abb.8a) und dann die Ausgangsspannung (Abb.8b) untersucht, die Spannungsverläufe sind im Protokoll zu skizzieren (4 Skizzen: einmal U_e und für jedes RC-Glied U_a).

Mit Hilfe des Zeitmaßstabes wird die Halbwertszeit des Lade- bzw. Entladevorganges der drei RC-Glieder bestimmt. Dabei sind Verstärkung und Zeitmaßstab so zu wählen, dass ein möglichst großes Bild des Signals vermessen werden kann.

5 Auswertung

5.1 Es wird der Mittelwert der gemessenen Halbwertszeiten und daraus nach (16) die Zeitkonstante τ des RC-Gliedes berechnet. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der aus den Bauelementedaten berechneten Zeitkonstante!

5.2 Aus den gemessenen Grenzfrequenzen sind nach (20) die Zeitkonstanten der RC-Glieder zu berechnen.

5.3 Aus den mit dem Oszillographen bestimmten Halbwertszeiten wird mit Gleichung (16) ebenfalls die Zeitkonstante berechnet.

5.4 Die Zeitkonstanten sind zusätzlich aus den aufgedruckten Daten der Bauelemente zu berechnen.

Stellen Sie die Ergebnisse aus 5.2 bis 5.4 übersichtlich in einer Tabelle dar. Vergleichen Sie die mit verschiedenen Methoden ermittelten Zeitkonstanten, geben Sie mögliche Fehlerquellen an und schätzen Sie die Größe der Messunsicherheiten.

6 Literaturangaben

Harten, U.: Physik für Mediziner, Springer Verlag 2011

Kamke, D.; Walcher, W.: Physik für Mediziner, B.G. Teubner, Stuttgart 1994

7 Kontrollfragen

7.1 Was sind Maximalwert (Spitzenwert) und Effektivwert einer Wechselspannung?

7.2 Wo tritt ein Wechselstromwiderstand auf und wovon hängt er ab?

7.3 Erklären Sie die Eigenschaften eines Hoch- bzw. Tiefpasses.

7.4 Warum werden Rechteckimpulse durch ein RC-Glied verzerrt übertragen?