# KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT

Abitur
April/Mai 2003

Mathematik
(Leistungskurs)

Arbeitszeit: 300 Minuten

**Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten L 1, L 2 und L 3 zur Bearbeitung aus.**

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

| Gebiet L 1 | | Gebiet L 2 | | Gebiet L 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aufgabe 1.1 | ☐ | Aufgabe 2.1 | ☐ | Aufgabe 3.1 | ☐ |
| Aufgabe 1.2 | ☐ | Aufgabe 2.2 | ☐ | Aufgabe 3.2 | ☐ |

Unterschrift Prüfling:

**Gebiet L 1**

**Aufgabe 1.1**
**Analysis**

Gegeben sind die Funktionen $f_a$ in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich durch

$$y = f_a(x) = \frac{6x + 3a}{x^2 + ax} \quad , \ a \in R \, , a > 0 \, .$$

Ihre Graphen seien $G_a$.

a) Untersuchen Sie die Graphen $G_a$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und berechnen Sie deren Koordinaten. Ermitteln Sie die Gleichungen der horizontalen und vertikalen Asymptoten.

Weisen Sie nach, dass keiner der Graphen $G_a$ lokale Extrempunkte besitzt.

Der Schnittpunkt jedes Graphen $G_a$ mit der x-Achse ist der einzige Wendepunkt dieses Graphen.
Zeigen Sie, dass jeder Graph $G_a$ punktsymmetrisch bezüglich seines Wendepunktes ist.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f_4$ für $x \to 0$.

Skizzieren Sie den Graphen $G_4$.

b) Der Graph $G_4$, seine Wendetangente und die Geraden mit den Gleichungen $x = -3{,}5$ und $x = -0{,}5$ begrenzen eine Fläche A vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche A.

c) Die Normale im Wendepunkt des Graphen $G_4$ rotiere im Intervall $-3{,}5 \le x \le -0{,}5$ um die x-Achse.
Beschreiben Sie den entstehenden Rotationskörper und berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.

d) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_a(x)dx$ auf Existenz und deuten Sie das Ergebnis an Hand des Graphen $G_4$.

**Gebiet L 1**

**Aufgabe 1.2**
**Analysis**

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = \ln x - \ln(3 - x)\ ; \qquad D_f\!: \ a < x < b;\ \ a, b, x \in R\,,$$

$$y = g(x) = \frac{3e^x}{1 + e^x}\ ; \qquad x \in R\,.$$

Ihre Graphen werden mit F und G bezeichnet.
Der Graph F besitzt genau einen Wendepunkt $W_F(u \mid v)$.
Der Graph G besitzt genau einen Wendepunkt $W_G(v \mid u)$.

a) Ermitteln Sie für den größtmöglichen Definitionsbereich $D_f$ die Werte von a und b und untersuchen Sie die Funktion f auf ihr Verhalten für $x \to a$ und $x \to b$.

   Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie und auf Existenz von lokalen Extremstellen.

   Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes $W_F$.

   Begründen Sie, dass zu der Funktion f eine inverse Funktion (Umkehrfunktion) existiert und zeigen Sie, dass die Funktion g Umkehrfunktion der Funktion f ist.

   Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion g.

   Zeichnen Sie die Graphen F und G in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie jeweils die Gleichungen der Wendetangenten der Graphen F und G und begründen Sie, dass diese Wendetangenten Graphen zueinander inverser Funktionen sind.

c) Der Graph G, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen x = 0 und x = 3 begrenzen eine Fläche vollständig.
   Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

d) Geben Sie eine geometrische Interpretation dafür an, dass zur Ermittlung des uneigentlichen Integrals $\int_{1,5}^{0} f(x)\,dx$ die Beziehung $\int_{1,5}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ genutzt werden kann.

**Gebiet L 2**

**Aufgabe 2.1**
**Analytische Geometrie**

Um ein Objekt zu schützen, wurde ein Überwachungssystem installiert, das ein Signal gibt, wenn ein Flugkörper in einen Bereich K einfliegt, der die Form einer Halbkugel H besitzt.

Die Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem; eine Einheit entspricht einem Kilometer, die x-y-Ebene sei die Horizontalebene auf Meereshöhe.

$$H:\ x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 14y - z - 45{,}75 = 0, \qquad x, y, z \in R, \quad z \geq 0{,}5$$

a) Das Objekt liegt im Mittelpunkt M der Halbkugel H.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M sowie die Entfernung von M, bei der ein Flugkörper ein Signal auslöst.

Im Rahmen einer Überprüfung des Überwachungssystems werden die nachfolgenden Situationen angenommen.

b) Ein sich geradlinig gleichförmig auf den Bereich K hin bewegender Flugkörper sei im Punkt A(29 | 36 | 9,5) und nach 7 Sekunden im Punkt B(21 | 26 | 7,5) geortet worden.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden AB auf.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem dieser Flugkörper bei Weiterflug mit konstanter Geschwindigkeit und ohne Richtungsänderung ein Signal auslösen würde und die Zeit, die bis zur Signalauslösung seit der letzten Ortung vergeht.

Ermitteln Sie die kürzeste Entfernung, in der der Flugkörper bei Fortsetzung dieses Fluges ohne Richtungsänderung am Objekt (Punkt M, siehe Aufgabe a) vorbei fliegen würde.

c) Die Ortung von Flugkörpern erfolgt mit Radaranlagen. Eine Radaranlage befindet sich im Punkt R(3 | –2 | 0,5). Diese Radaranlage erkennt Flugkörper nur oberhalb einer Ebene E. Die Ebene E ist durch die Gerade MR und den Punkt T(0 | 8 | 1,5) bestimmt.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

Untersuchen Sie, ob die sich im Punkt R befindende Radaranlage den Flugkörper in den Punkten A und B (siehe Aufgabe b) erkennen würde.

**Gebiet L 2** **Aufgabe 2.2**
**Analytische Geometrie**

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte
A (–1| 2 | 1,5), B (–1| –1| –2,5), C (4 | 3 | –0,5) und D (2 | –0,5 | –3)
sowie die Gerade

$$G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad m \in R,$$

gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene $E_1$.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

b) Die Gerade g liegt in einer Ebene $E_2$ mit der Gleichung
$E_2$: $2x + y - 2z - 9{,}5 = 0$.
Zeigen Sie, dass der Punkt D und die Gerade g die Ebene $E_2$ festlegen.

c) Die Ebenen $E_1$ und $E_2$ schneiden einander in einer Geraden s.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ]

Ermitteln Sie die Koordinaten des Spurpunktes dieser Geraden in der x-y-Ebene des Koordinatensystems und berechnen Sie das Gradmaß ihres Neigungswinkels gegenüber dieser Ebene.

d) Die Gerade s sei Symmetrieachse eines geraden Kreiszylinders. Ebene Schnitte durch den Zylinder parallel zur Grundfläche desselben erzeugen Kreise um die Gerade s.
Zeigen Sie, dass die Punkte E(5 | 8 | 2) und G(5 | 5 | 5) Endpunkte eines Durchmessers eines solchen Kreises sind.

Der Kreis um die Gerade s, welcher die Punkte E und G enthält, ist Umkreis eines Quadrates mit den Eckpunkten E, F, G und H.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte F und H.

**Gebiet L 3** **Aufgabe 3.1**
**Stochastik**

Eine Imbiss-Kette mit sehr vielen Kunden hat eine Langzeitstudie zum Kaufverhalten ihrer Kunden erarbeiten lassen. Es wurde festgestellt:
- 40 % aller Kunden sind männlich.
- 50 % aller Kunden kaufen morgens (Morgenkauf).
- 35 % aller Kunden sind weiblich und kaufen morgens nicht.

a) Betrachtet werden die nachstehenden Ereignisse:
A: Von 20 zufällig ausgewählten Kunden kaufen 10 morgens.
B: Von 50 zufällig ausgewählten Kunden kaufen mindestens 25 morgens.
C: Ein zufällig ausgewählter Kunde ist männlich.
D: Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft morgens.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse A und B.

Untersuchen Sie die Ereignisse C und D auf (stochastische) Unabhängigkeit.

b) Berechnen Sie (auf Hundertstel genau), wie groß die Wahrscheinlichkeit für einen Morgenkauf mindestens sein muss, damit 20 zufällig ausgewählte Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,25 alle morgens kaufen.

Die Imbiss-Kette will ihre Öffnungszeiten morgens verlängern, wenn in einer erneuten Umfrage mindestens 40 % aller Kunden am Morgenkauf interessiert sind. Es werden 200 zufällig ausgewählte Kunden zum Morgenkauf befragt.

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Kunden, die am Morgenkauf interessiert sind; die Zufallsgröße X werde als binomialverteilt angenommen.

c) Entwickeln Sie dazu einen Signifikanztest, bei dem die Wahrscheinlichkeit für die irrtümliche Ablehnung verlängerter Öffnungszeiten höchstens 5 % beträgt (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$) und geben Sie die zugehörige Entscheidungsregel an.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dieser Entscheidungsregel die Imbiss-Kette morgens länger öffnet, obwohl tatsächlich nur 25 % aller Kunden am Morgenkauf interessiert sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der am Morgenkauf interessierten Kunden um mehr als 10 von ihrem Erwartungswert abweicht, wenn 40 % aller Kunden am Morgenkauf interessiert sind.

**Gebiet L 3**

**Aufgabe 3.2**
**Stochastik**

Ein Baumarkt bietet Schrauben einer bestimmten Sorte in Kleinpackungen zu 100 Stück und in Großpackungen zu 250 Stück an.
Erfahrungsgemäß werden die Kleinpackungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % und die Großpackungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % verkauft.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter 200 verkauften Abpackungen
   – höchstens 100 Großpackungen,
   – mindestens 125 Kleinpackungen sind.

Die Schrauben sind zu 5 % fehlerhaft durch Fehler am Gewinde (Fehler G) oder am Kopf (Fehler K). Die Fehler G und K treten unabhängig voneinander auf, wobei der Fehler G die Wahrscheinlichkeit von 3 % hat.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: Eine Schraube hat den Fehler K.
   B: Eine Schraube weist die Fehler G und K auf.

[Ergebnis zur Kontrolle: $P(A) = \frac{2}{97}$ ]

Eine Schraube ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % fehlerfrei. In der Endkontrolle des Unternehmens wird eine fehlerfreie Schraube irrtümlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % ausgesondert; insgesamt werden 10 % aller Schrauben ausgesondert.

c) Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm.

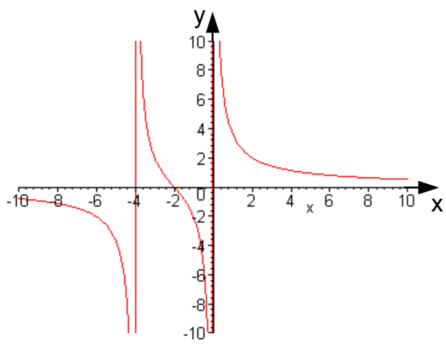
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
   C: Eine Schraube, die fehlerhaft ist, wird bei der Endkontrolle ausgesondert.

Die Schrauben werden von einem Unternehmen an insgesamt 350 unabhängig voneinander arbeitenden Automaten produziert. Jeder der Automaten wird über einen Chip mit der Ausfallwahrscheinlichkeit 4 % gesteuert.

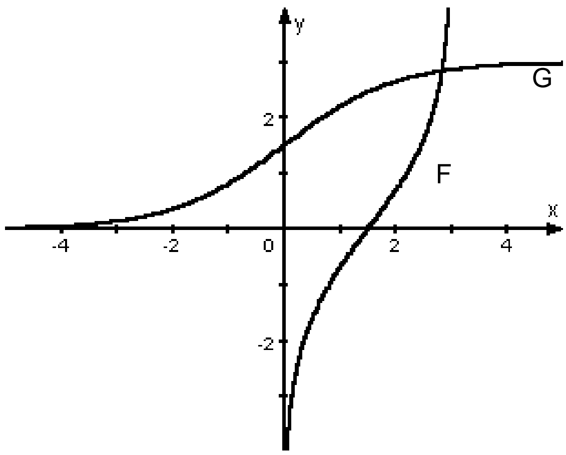
d) Berechnen Sie, wie viele Ersatzchips mindestens bereit gehalten werden müssen, um bei Chip-Ausfall mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % Ersatz verfügbar zu haben.

**Gebiet L 1**

**Aufgabe 1.1**
**Analysis**

| **Auf-gabe** | **BE** | **Hinweise, Lösungen** |
|---|---|---|
| a) | 7 | Untersuchen von $G_a$ auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Ermitteln der Gleichungen der Asymptoten, z. B.:<br>$P_x(-\frac{a}{2} \mid 0)$ ; kein $P_y$<br>horizontale Asymptote: $y = 0$<br>vertikale Asymptoten : $x = 0$ ; $x = -a$ |
| | 5 | Nachweisen, dass $G_a$ keine lokalen Extrempunkte hat, z. B.:<br>$f_a'(x) = 3 \cdot \frac{-2x^2 - 2ax - a^2}{(x^2 + ax)^2} \neq 0$ für alle $x \in D_f$<br>notwendige Bedingung nicht erfüllt $\Rightarrow$ keine lokalen Extrempunkte |
| | 5 | Nachweisen der Punktsymmetrie bezüglich des Wendepunktes, z. B.:<br>$G_a$ in Ursprung verschieben und Punktsymmetrie dieses Graphen bezogen auf den Ursprung nachweisen<br>$\overline{f_a}(x) = f_a(x - \frac{a}{2}) = \frac{6x}{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ MIT $x \in D_{\bar{f}}$<br>Für alle $x \in D_f$ gilt: $\overline{f_a}(x) = -\overline{f_a}(-x)$. |
| | 4 | Untersuchen des Verhaltens von $f_4$ an der Polstelle x = 0, z. B.:<br>$\lim\limits_{x \to +0} f_4(x) = \lim\limits_{x \to +0} \frac{x(6 + \frac{12}{x})}{x(x+4)} = +\infty$ ;<br>$\lim\limits_{x \to -0} f_4(x) = \lim\limits_{x \to -0} \frac{x(6 + \frac{12}{x})}{x(x+4)} = -\infty$<br><br> |
| | 5 | Skizzieren des Graphen $G_4$ |
| b) | 9 | Berechnen der Maßzahl von A, z. B.:<br>Gleichung der Wendetangente: $y = -\frac{3}{2}x - 3$<br>$A = 2 \cdot \int\limits_{-3,5}^{-2} (f_4(x) - (-\frac{3}{2}x - 3))dx = 2\left[3\ln\left\|x^2 + 4x\right\| + \frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_{-3,5}^{-2}$<br>$A \approx 1{,}59$ |
| c) | 6 | Beschreiben des Rotationskörpers und Berechnen der Volumenmaßzahl, z. B.:<br>Es entsteht ein Doppelkegel mit der Kegelspitze im Punkt (–2 \| 0), der Höhe 3 und dem Grundkreisradius 1.<br>Gleichung der Normalen: $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$<br>$V_x = \pi$ |
| d) | 4 | Untersuchen des uneigentlichen Integrals und Deuten des Ergebnisses, z. B.:<br>$\int\limits_0^1 f_a(x)dx = 3 \cdot \lim\limits_{b \to 0} \int\limits_b^1 \frac{2x + a}{x^2 + ax}dx = \infty$<br>Die von der Asymptote $x = 0$, der Geraden $x = 1$, der x-Achse und dem Graphen $G_4$ begrenzte (ins Unendliche reichende) Fläche hat keinen endlichen Inhalt. |
| | **45** | |

**Gebiet L 1** **Aufgabe 1.2**
**Analysis**

| Auf-gabe | BE | Hinweise, Lösungen |
|---|---|---|
| a) | 6 | Ermitteln der Werte von a und b und Untersuchen des Verhaltens von f, z. B.: $a = 0$; $b = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$ |
| | 5 | Untersuchen von f auf Monotonie und auf die Existenz von lokalen Extremstellen, z. B.: $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend<br>Notwendige Bedingung für Extrempunkte für kein $x \in D_f$ erfüllt<br>$\Rightarrow$ keine lokalen Extrempunkte |
| | 5 | Ermitteln der Koordinaten des Wendepunktes, z. B.: Notwendige Bedingung nur für $x = 1{,}5$ erfüllt; W( 1,5 \| 0 ) |
| | 4 | Begründen der Existenz einer Umkehrfunktion und Zeigen, dass g Umkehrfunktion von f ist |
| | 1 | Ermitteln des Wertebereiches von g |
| | 6 | Zeichnen der Graphen F und G<br><br> |
| b) | 7 | Ermitteln der Gleichungen der Wendetangenten und Begründen, z. B.: $y = t_F(x) = \frac{4}{3}x - 2$ und $y = t_G(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$;<br>$t_F^{-1}(y) = t_G(x)$ |
| c) | 7 | Berechnen der Maßzahl A des Flächeninhaltes, z. B.: $A = \int\limits_0^3 \frac{3e^x}{1+e^x}\,dx = 3\cdot\left[\ln(1+e^x)\right]_0^3 \approx 7{,}07$ |
| d) | 4 | Angeben einer geometrischen Interpretation, dass die Beziehung genutzt werden kann, z. B.:<br>Linkes Integral: Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen F und den Koordinatenachsen<br>Rechtes Integral: Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen G und den Koordinatenachsen<br>Da F und G Graphen zueinander inverser Funktionen sind, sind die betrachteten Inhalte gleich. |
| | **45** | |

**Gebiet L 2** **Aufgabe 2.1**
**Analytische Geometrie**

| Auf-gabe | BE | Hinweise, Lösungen |
|---|---|---|
| a) | 3 | Ermitteln der Koordinaten des Punktes M sowie der Entfernung, z. B.:<br>M(–6 \| 7 \| 0,5)<br>$r = \sqrt{131}$ $\Rightarrow$ Entfernung für Signalauslösung: 11445 m |
| b) | 3 | Aufstellen einer Gleichung der Geraden AB, z. B.:<br>$g_{AB}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 29 \\ 36 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| | 6 | Berechnen der Koordinaten des Punktes S und der Zeit, z. B.:<br>$g_{AB} \cap H$ $\Rightarrow$ $42t^2 + 588t + 2016 = 0$<br>$\Rightarrow$ $t_1 = -6$ $\Rightarrow$ S(5 \| 6 \| 3,5) ($t_2 = -8$ entfällt) |
| | 2 | $\overrightarrow{BS} = 2\ \overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $1 : 2 = 7 : x$ $\Rightarrow$ $x = 14$<br>$\Rightarrow$ Zeit bis zur Signalauslösung: 14 s |
| | 5 | Berechnen der kürzesten Entfernung, z. B.:<br>$d(M\,;\,g_{AB}) = \sqrt{\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{v^0_{g_{AB}}}} = \sqrt{89}$<br>$\Rightarrow$ kürzeste Entfernung: 9434 m |
| c) | 5 | Ermitteln einer Koordinatengleichung der Ebene E, z. B.:<br>$\overrightarrow{RM} \times \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -63 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$<br>$\Rightarrow$ E: $-x - y + 7z - 2{,}5 = 0$ |
| | 6 | Untersuchen, ob Flugkörper durch Radaranlage erkannt wird, z. B.:<br>Der Koordinatenursprung O liegt unterhalb der Ebene E, da für die Koordinate $z_S$ des Schnittpunktes von E mit der z-Achse gilt: $z_S = \frac{5}{14} > 0$.<br>$\vec{n}^0_E\,(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OR}) = \frac{-1}{\sqrt{51}} < 0$<br>$\Rightarrow$ Punkt A liegt im gleichem Halbraum wie Punkt O bez. der Ebene E, d.h. Flugkörper würde im Punkt A vom Radar nicht erkannt werden<br>$\vec{n}^0_E\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OR}) = \frac{3}{\sqrt{51}} > 0$<br>$\Rightarrow$ Punkt B liegt nicht im gleichem Halbraum wie Punkt O bez. der Ebene E, d.h. Flugkörper würde im Punkt B vom Radar erkannt werden |
| | **30** | |

**Gebiet L 2**

**Aufgabe 2.2**
**Analytische Geometrie**

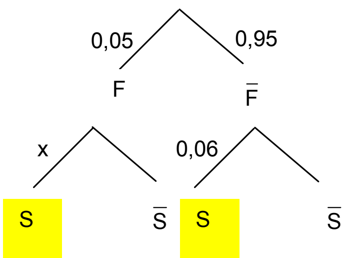
| **Auf-gabe** | **BE** | **Hinweise, Lösungen** |
|---|---|---|
| a) | 5 | Ermitteln einer Koordinatengleichung der Ebene $E_1$, z. B.:<br>$E_1$: $2x - 4y + 3z + 5{,}5 = 0$ |
| b) | 4 | Zeigen, dass der Punkt D und die Gerade g die Ebene $E_2$ festlegen, z. B.:<br>(1) $g \subset E_2$<br>(2) $D \in E_2$<br>(3) $D \notin g$<br>$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow E_2 = E_2(D,g)$ |
| c) | 6 | Ermitteln einer Geradengleichung, z. B.:<br>s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in R$ |
| | 4 | Ermitteln der Koordinaten des Spurpunktes und Berechnen des Winkelgradmaßes, z. B.:<br>S(3,25 \| 3 \| 0)<br>$\sin \angle(s, E_{xy}) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \angle(s, E_{xy}) \approx 41{,}8°$ |
| d) | 5 | Zeigen, dass Punkte Endpunkte eines Durchmessers sind, z. B.:<br>Gerade l = l(EG), $L = l \cap s \quad \Rightarrow \quad$ L(5 \| 6,5 \| 3,5)<br>$d(E,s) = d(G,s) = 1{,}5\sqrt{2} \quad \wedge \quad l \perp s$ |
| | 6 | Berechnen der Punktkoordinaten, z. B.:<br>$\vec{n}$ sei ein Richtungsvektor der Diagonale FH<br>$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\lvert \vec{n} \rvert = \lvert \overrightarrow{EG} \rvert$<br>$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OL} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ H(3 \| 7 \| 4)<br>$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OL} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ F(7 \| 6 \| 3) |
| | **30** | |

**Gebiet L 3**

**Aufgabe 3.1**
**Stochastik**

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>BE</th><th>Hinweise, Lösungen</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>4</td><td>Berechnen der Wahrscheinlichkeiten, z. B.:<br>ZG $X_n$ beschreibe die Anzahl derjenigen Kunden unter den Kunden, die morgens kaufen;<br>$X_{20} \sim B_{20;\,0,5}$<br>$P(A) = P(X_{20} = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}17620$<br>$X_{50} \sim B_{50;\,0,5}$<br>$P(B) = P(X_{50} \geq 25) = 1 - P(X_{50} \leq 24) = 1 - 0{,}44386 = 0{,}55614$</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Untersuchen auf (stochastische) Unabhängigkeit, z. B.:<br>
<table>
<tr><th></th><th>$D$</th><th>$\overline{D}$</th><th></th></tr>
<tr><td>$C$</td><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>$\overline{C}$</td><td>0,25</td><td>0,35</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td></td><td>0,50</td><td>0,50</td><td>1</td></tr>
</table>
$P(C \cap D) = 0{,}25$<br>$P(C) \cdot P(D) = 0{,}40 \cdot 0{,}50 = 0{,}20$<br>$P(C \cap D) \neq P(C) \cdot P(D)$<br>$\Rightarrow$ Ereignisse C und D (stochastisch) abhängig</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>3</td><td>Berechnen der Mindestwahrscheinlichkeit, z. B.:<br>ZG Y beschreibe die Anzahl der Kunden, die morgens kaufen; $Y \sim B_{20;\,p}$<br>$P(Y = 20) \geq 0{,}25;\quad \binom{20}{20} \cdot p^{20} \cdot (1-p)^0 \geq 0{,}25 \Leftrightarrow p \geq \sqrt[20]{0{,}25} \Rightarrow p \geq 0{,}9330...$<br>Mindestwahrscheinlichkeit: p = 0,933</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>6</td><td>Entwickeln eines Signifikanztests und Angeben der Entscheidungsregel, z. B.:<br>$X \sim B_{200;\,0,4}$ (bei wahrer $H_0$); $\alpha = 0{,}05$<br>$H_0$: $p_0 \geq 0{,}40$; kleine Werte von X sprechen gegen $H_0$.<br>$\Rightarrow$ linksseitiger Signifikanztest mit $\overline{A} = \{0;\ 1;\ ...;\ k\}$<br>$P(X \leq k) = B_{200;\,0,4}(\{0;\ 1;\ ...;\ k\}) \leq 0{,}05 \Rightarrow k = 68$<br>Entscheidungsregel: $\overline{A} = \{0;\ 1;\ ...;\ 68\}$<br>wenn $X \in \overline{A}$, dann $H_0$ ablehnen (Imbisskette öffnet morgens nicht länger)</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>Ermitteln der Fehlerwahrscheinlichkeit, z. B.:<br>$\beta = 1 - B_{200;\,0,25}(\{0;\ 1;\ ...;\ 68\}) = 1 - 0{,}99830 = 0{,}0017$</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Berechnen der Wahrscheinlichkeit für die Abweichung, z. B.:<br>$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}4 = 80$; $\quad |X - 80| \geq 11 \Leftrightarrow X \geq 91$ oder $X \leq 69$<br>$P(X \geq 91$ oder $X \leq 69) = 1 - P(X \leq 90) + P(X \leq 69)$<br>$= 1 - B_{200;\,0,4}(\{0;\ 1,\ ...;\ 90\}) + B_{200;\,0,4}(\{0;\ 1,\ ...;\ 69\}) = 0{,}12939$</td></tr>
<tr><td></td><td>**25**</td><td></td></tr>
</table>

**Gebiet L 3** **Aufgabe 3.2**
**Stochastik**

| **Auf-gabe** | **BE** | **Hinweise, Lösungen** |
|---|---|---|
| a) | 5 | Berechnen der Wahrscheinlichkeiten, z. B.:<br>ZG X beschreibe die Anzahl der Großpackungen; $X \sim B_{200;\,0,4}$<br>$P(X \leq 100) = B_{200;\,0,4}(\{0;\ 1;\ ...;\ 100\}) = 0{,}99832$<br>ZG Y beschreibe die Anzahl der Kleinpackungen; $Y \sim B_{200;\,0,6}$<br>$P(Y \geq 125) = 1 - P(Y \leq 124) = 1 - 0{,}74104 = 0{,}25896$ |
| b) | 8 | Berechnen der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C, z. B.:<br>Ereignis A<br>Ereignis F: Schraube fehlerhaft; $P(F) = 0{,}05$<br>Ereignis G: Schraube hat den Fehler G; $P(G) = 0{,}03$<br>$P(F) = P(G \cup A) = P(G) + P(A) - P(G \cap A)$, $P(G \cap A) = P(G) \cdot P(A) \Rightarrow$<br>$P(A) = \dfrac{P(G \cup A) - P(G)}{1 - P(G)}$; $P(A) = \dfrac{0{,}05 - 0{,}03}{1 - 0{,}03} = \dfrac{2}{97} \approx 0{,}02$<br><br>Ereignis B<br>$P(B) = P(G \cap A) = P(G) \cdot P(A)$; $P(B) \approx 6 \cdot 10^{-4}$ |
| c) | 5 | Veranschaulichen im Baumdiagramm und Berechnen des Ereignisses C, z. B.:<br><br><br>$P(F) = 0{,}05$; $P(\overline{F}) = 0{,}95$<br>S – ausgesondert;<br>$\overline{S}$ – nicht ausgesondert<br>$P(S) = 0{,}1$; $P_{\overline{F}}(S) = 0{,}06$<br>$P(C) = P_F(S) = x$<br>$0{,}05 \cdot x + 0{,}95 \cdot 0{,}06 = 0{,}1$<br>$\Rightarrow\ x = P(C) = 0{,}86$ |
| d) | 7 | Berechnen der Mindestanzahl der Ersatzchips, z. B.:<br>ZG Z beschreibe die Anzahl der Ersatzchips<br>empirisches Kriterium $V(Z) > 9$ erfüllt, denn $V(Z) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 13{,}44 > 9$<br>$P(Z \leq k) \approx \Phi\left(\dfrac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right)$<br>$\mu = n \cdot p = 350 \cdot 0{,}04 = 14$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{13{,}44}$<br>$P(Z \leq k) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \dfrac{k - 14 + 0{,}5}{\sqrt{13{,}44}} \geq 2{,}33 \Rightarrow k \geq 22{,}04...$<br>Mindestanzahl der Ersatzchips: 23 |
| | **25** | |