Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Analysis

Gegeben sind die Funktion f und die Funktionen g_a durch:

f: $y = f(x) = 2x - 5\ln(x+1)$; $x \in D_f$;

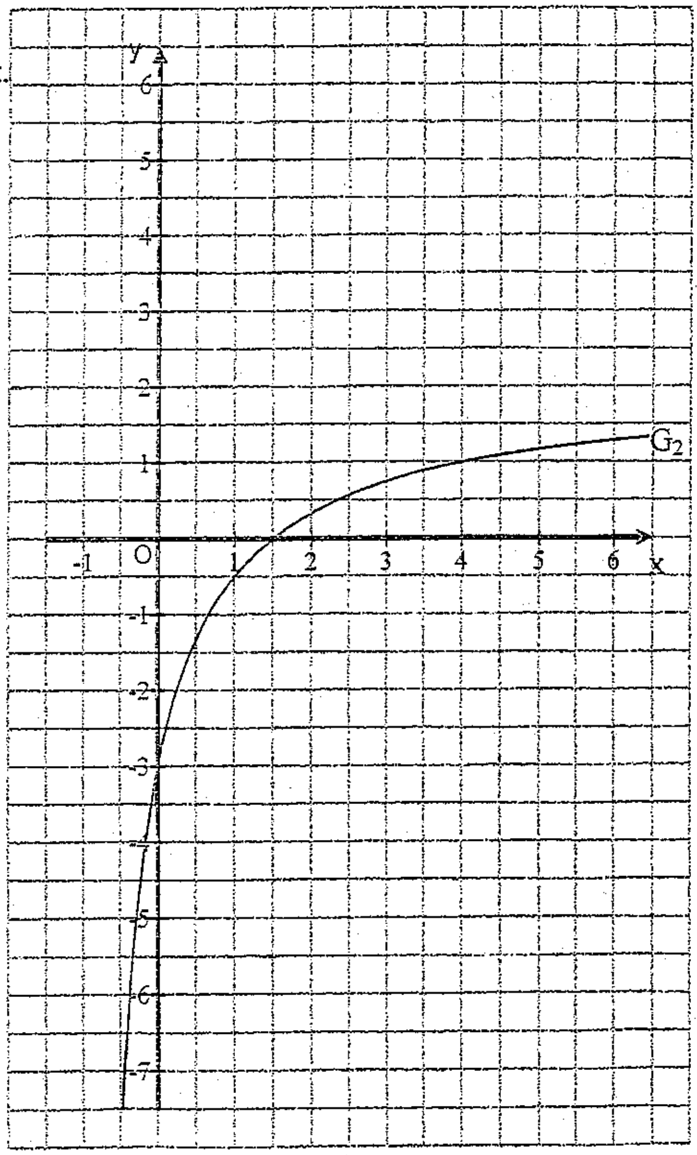
g_a: $y = g_a(x) = \dfrac{ax-3}{x+1}$; $a, x \in R$; $x > -1$.

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_f sowie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen der Funktion f mit der y-Achse an.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f die x-Achse im Intervall [4; 5] schneidet.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 < x \leq 6$ in das gegebene Koordinatensystem.



Die Graphen der Funktionen g_a seien mit G_a bezeichnet.

b) Ermitteln Sie von den Graphen G_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie Gleichungen der Asymptoten.

Untersuchen Sie die Funktionen g_a auf Monotonie.

Weisen Sie nach, dass die Funktion f eine Stammfunktion der Funktion g_2 ist und beschreiben Sie an zwei Eigenschaften dieser Funktionen bzw. ihrer Graphen, wie sich dieser Zusammenhang zeigt.

Hinweis:
Beschriften Sie dieses Blatt mit Ihrem Namen und fügen Sie es der Prüfungsarbeit bei.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem seien durch die Punkte $A(1 \mid 1 \mid 2)$, $B(3 \mid -5 \mid 0)$, $C(9 \mid -3 \mid 1)$ und $D(7 \mid 3 \mid 1)$ die Geraden AB, AC und AD gegeben.

a) Begründen Sie, dass die Geraden AB und AD eine Ebene bestimmen und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

b) Zeigen Sie, dass $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$ und schlussfolgern Sie daraus die gegenseitige Lage der Geraden AB, AC und AD.

Die Punkte A, B, C und D werden mittels senkrechter Parallelprojektion in die x-y-Ebene projiziert. Ihre Bilder $A_1(1 \mid 1)$, $B_1(3 \mid -5)$, $C_1(9 \mid -3)$ und $D_1(7 \mid 3)$ werden unter Beibehaltung der x-Achse und der y-Achse nun in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene betrachtet.

c) Weisen Sie nach, dass die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 Eckpunkte eines Quadrates sind und ermitteln Sie eine Gleichung des Umkreises dieses Quadrates.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Für einen Einstellungstest sind Aufgaben erprobt worden.
Eine solche Aufgabe besteht aus drei Fragen.
Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der richtig beantworteten Fragen, und es ist bekannt:

$X = k$	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,08	0,38	0,42	0,12

a) Begründen Sie, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X vorliegt.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E.
E: „Mindestens eine Frage wird richtig beantwortet."

Ein Einstellungstest besteht aus 50 Aufgaben. Man geht davon aus, dass jede Aufgabe mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 richtig beantwortet wird und dass die Beantwortung der Aufgaben unabhängig voneinander erfolgt. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der richtig beantworteten Aufgaben.

b) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße Y als binomialverteilt angenommen werden kann, und berechnen Sie deren Erwartungswert sowie die Wahrscheinlichkeit, mit der weniger als 30 Aufgaben richtig beantwortet werden.

c) Ein Großunternehmen möchte den Einstellungstest zur Auswahl von Bewerbern verwenden.
Um die Eignung des Einstellungstests zu untersuchen, werden 100 Probanden diesem Einstellungstest unterzogen. Die Zufallsgröße Z beschreibe die Anzahl der Probanden, die den Einstellungstest bestehen.

Ermitteln Sie zur Nullhypothese „H_0: $p \geq 0{,}5$" den größtmöglichen Ablehnungsbereich für das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ und geben Sie eine zugehörige Entscheidungsregel an.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.1
Analysis

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Graph G der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \in R$) sowie der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0 | 2) und dem Radius mit der Maßzahl 2 gegeben.

Der Graph G und der Kreis k schließen im I. Quadranten eine Fläche vollständig ein.

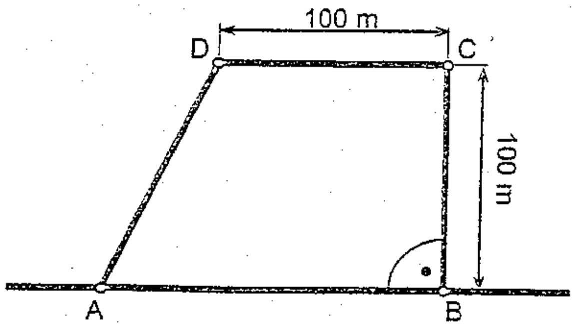
Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.2
Analytische Geometrie

Von einem ebenen Gebiet soll ein Lageplan erstellt werden. Diesem Lageplan liege ein kartesisches Koordinatensystem zu Grunde. Eine Einheit auf den Achsen entspricht 10 m und die positive Orientierung der y-Achse gibt die Richtung nach Norden an.
Der Verlauf eines geradlinigen Weges sei im Lageplan durch die Punkte A(–3 | –4) und B(6 | 8) beschrieben.

An diesen Weg grenzt ein trapezförmiges Grundstück, dessen Form in der Abbildung dargestellt ist.
Im Punkt C(–2 | 14) soll ein Mast einer in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Hochspannungsleitung errichtet werden.



Zeichnen Sie den Lageplan, der alle genannten Objekte enthält.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden AB.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D im Lageplan.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, über der die Hochspannungsleitung im Grundstück verläuft.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	2	Angeben von D_f sowie der Schnittpunktkoordinaten, z. B.: D_f: $x \in R$ und $x > -1$ $\quad S_y(0 \mid 0)$
	8	Untersuchen der Graphen auf lokale Extrempunkte, auf Wendepunkte und Angeben der Koordinaten, z. B.: $f'(x) = 2 - \frac{5}{x+1}$; notwendige Bedingung für $x = 1{,}5$ erfüllt. hinreichende Bedingung für Tiefpunkt $T(1{,}5 \mid 3 - 5\ln 2{,}5)$ erfüllt, wobei $f''(1{,}5) = 0{,}8 > 0$ keine Wendepunkte, da $f''(x) = \frac{5}{(x+1)^2} \neq 0$ für alle $x \in D_f$
	2	Begründen, dass der Graph die x-Achse im Intervall [4; 5] schneidet, z. B.: $f(4) = -0{,}047... < 0$ und $f(5) = 1{,}041... > 0$; f ist stetig. $\Rightarrow$ Nach dem Zwischenwertsatz hat f in [4; 5] eine Nullstelle.
	4	Zeichnen des Graphen
b)	5	Ermitteln der Schnittpunktkoordinaten sowie der Gleichungen der Asymptoten, z. B.: $S_x(\frac{3}{a} \mid 0)$; $S_y(0 \mid -3)$; Polasymptote: $x = -1$; $\quad$ Asymptote: $y = a$
	4	Untersuchen auf Monotonie, z. B.: $g_a'(x) = \frac{a+3}{(x+1)^2}$ für $a > -3$ monoton wachsend und für $a < -3$ monoton fallend
	5	Nachweis, dass f Stammfunktion von g_2 ist und Beschreiben, z. B.: $f'(x) = g_2(x)$ Da f Stammfunktion von g_2 ist, ist g_2 die Ableitungsfunktion von f. g_2 beschreibt also geometrisch die Anstiege des Graphen von f. Der Graph von g_2 hat z. B. bei 1,5 eine Nullstelle, d. h. der Anstieg des Graphen von f ist an dieser Stelle 0 (erkennbar am Tiefpunkt). Analog kann man aus den Funktionswerten von g_2 an allen weiteren Stellen das Monotonieverhalten von f beschreiben; z. B. für $x < 1{,}5$ ist $g_2(x)$ negativ; folglich ist die Funktion f in diesem Bereich monoton fallend.
	30	

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	5	Begründen, dass die Geraden eine Ebene bestimmen und Ermitteln einer Koordinatengleichung, z. B.: für alle $r \in R$ gilt $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ Die Punkte A, B und D liegen nicht auf ein und derselben Geraden und bestimmen somit eine Ebene. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix} \wedge A \in E \qquad \Rightarrow \qquad E\colon\ x - y + 4z - 8 = 0$
b)	4	Zeigen, dass $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$ und Schlussfolgern, z. B.: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 80 \neq 0$ Wegen $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{AC} \rvert \cdot \cos\angle((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}); \overrightarrow{AC}) \neq 0$ folgt $\angle((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}); \overrightarrow{AC}) \neq 90°$, d. h. die Geraden AB, AC und AD liegen nicht in ein und derselben Ebene.
c)	6	Nachweisen des Quadrates und Ermitteln einer Kreisgleichung z. B.: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} \wedge \lvert \overrightarrow{A_1D_1} \rvert = \lvert \overrightarrow{A_1B_1} \rvert \wedge \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = 0$ $\Rightarrow$ Die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 sind Eckpunkte eines Quadrates. $M_k = M_{\overline{A_1C_1}} \wedge r^2 = \frac{1}{4} \cdot \lvert \overrightarrow{A_1C_1} \rvert^2 \quad \Rightarrow \quad k\colon\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = 20$
	15	

Pflichtaufgaben

Aufgabe 3
Stochastik

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	2	Begründen, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt, z. B.: Jedem möglichen Wert von X ist eindeutig eine reelle Zahl p ($0 < p < 1$) als Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Die Summe aller zugeordneten Wahrscheinlichkeiten beträgt 1.
	3	Berechnen von Erwartungswert und Interpretation sowie Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E, z. B.: $E(X) = 1{,}58$ Im statistischen Mittel werden 1,58 Fragen richtig beantwortet; das heißt von z. B. 300 Fragen werden 158 Fragen richtig beantwortet. $P(E) = P(X \geq 1) = 0{,}92$
b)	5	Begründen der Binomialverteilung, Berechnen des Erwartungswertes sowie der Wahrscheinlichkeit, z. B.: Begründung; $Y \sim B_{50;\,0,6}$; $E(Y) = 30$ $P(Y \leq 29) = 0{,}4390$
c)	5	Ermitteln des größtmöglichen Ablehnungsbereichs und Angeben einer Entscheidungsregel, z. B.: $Z \sim B_{100;\,0,5}$ (bei wahrer H_0) $\overline{A} = \{0; 1; \ldots; k\}$; $P(Z \leq k) = P(\overline{A}) \leq 0{,}05$ $P(Z \leq k) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow k = 41$; $\overline{A} = \{0; 1; \ldots; 41\}$ Wenn die Anzahl der Probanden, die den Einstellungstest bestanden haben, im Ablehnungsbereich liegt, dann wird H_0 abgelehnt.
	15	

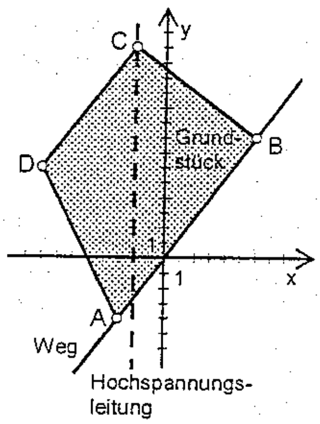
Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.1
Analysis

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
	10	Angeben einer Gleichung für k und Berechnen der Maßzahl des Inhalts, z. B.: $x^2 + (y-2)^2 = 4$ (1) Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes von G und k im I. Quadranten (2) $A = A_1 - A_2$ $A_2 = 4 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2$, $A_1 = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{4}{3}$ $A = \frac{3\pi - 8}{3} \approx 0{,}475$
	10	

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.2
Analytische Geometrie

Aufgabe	BE	Hinweise, Lösungen
	3	Zeichnen des Lageplanes, z. B.: 
	2	Ermitteln einer Gleichung, z. B.: AB: $y = \frac{4}{3}x$
	3	Berechnen der Koordinaten des Punktes D, z. B.: $\vec{OD} = \vec{OC} + 10 \cdot \frac{1}{\lvert\vec{BA}\rvert}\vec{BA} = \begin{pmatrix}-2\\14\end{pmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix} \Rightarrow D(-8 \mid 6)$
	2	Berechnen der Streckenlänge, z. B.: $y_C - y_S = 14 - \frac{4}{3}(-2) = \frac{50}{3}$ Länge der Strecke: ≈ 167 m
	10	