Komplexe Aufgabe - Funktionsuntersuchungen

Gegeben seien die Kurvenschar $f_t(x) = t \cdot (x - x^2)$;$D(f_t) = R$, $t > 0$ und die allgemeine Gleichung einer rationalen Funktion 3.Grades $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,; a, b, c, d \in R$.

Bestimmen Sie zur Funktion f_1 eine Funktion 3.Grades g_1 mit folgenden Eigenschaften:

a) Die beiden Funktionen haben die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse.
b) An der größeren Schnittstelle stehen die Tangenten an die Funktionsgraphen senkrecht aufeinander.
c) An der kleineren Schnittstelle berührt der Graph von g_1 den Graphen von f_1.

Kontrollergebnis: $g_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den beiden Funktionen vollständig eingeschlossen wird!

Stellen Sie beide Funktionen in einem Koordinatensystem im Intervall $x \in [-1;1,5]$ grafisch dar! Ermitteln Sie dazu für beide Funktionen alle Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und die Funktionswerte an den Intervallgrenzen! Kennzeichnen Sie die berechnete Fläche!

Hinweis: Maßstab für beide Achsen 1LE (4cm)

Aufgabenstellungen mit erhöhtem Niveau

Bestimmen Sie Kurvenschar f_t die dazugehörige Kurvenschar g_t von Funktionen 3.Grades mit folgenden Eigenschaften:

a) Die jeweiligen Graphen f_t und g_t haben die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse.
b) An der größeren Schnittstelle stehen die Tangenten an die Funktionsgraphen senkrecht aufeinander.
c) An der kleineren Schnittstelle berührt der Graph von g_t den Graphen von f_t.

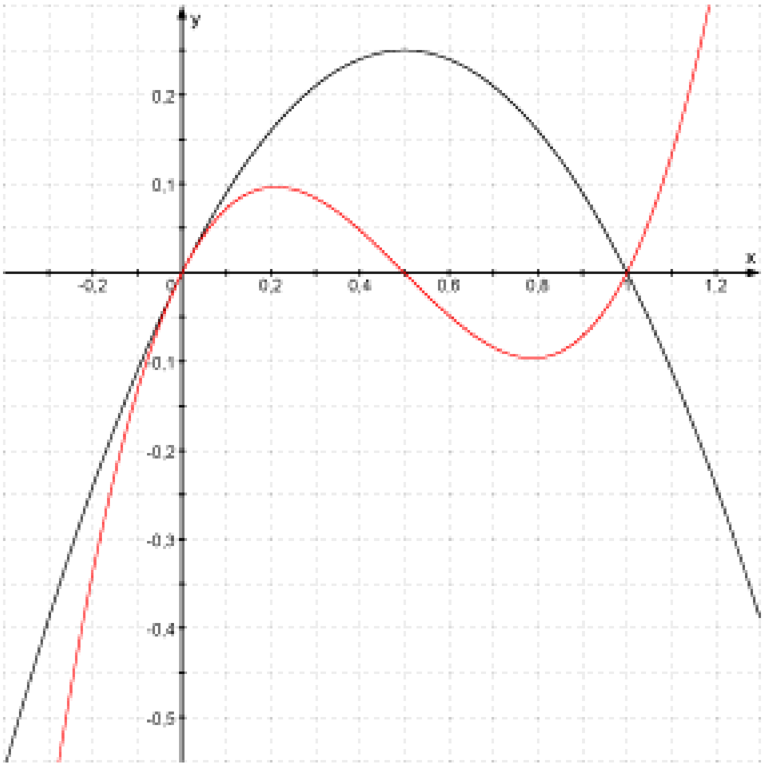
Kontrollergebnis: $g_t(x) = \left(t + \frac{1}{t}\right)x^3 - \left(2t + \frac{1}{t}\right)x^2 + tx$

Bestimmen sie den Flächeninhalt A(t), der von den jeweiligen Graphen der beiden Kurvenscharen vollständig eingeschlossen wird.

Kontrollergebnis: $A(t) = \frac{1}{12}\left(t + \frac{1}{t}\right)$

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt extremal werden kann! Bestimmen Sie die Art des Extremums!

Erweiterte Lösungshinweise



Schaubilder

f_1 (schwarz)
$f_1(x) = x - x^2$
g_1 (rot)
$g_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

Bestimmung von f_1 - Umsetzung der Bedingungen in Gleichungen

a) $f_1(x_{0i}) = g_1(x_{0i})$ ... gemeinsame Nullstellen

b) $f_1'(x_{02}) = -\dfrac{1}{g_1'(x_{02})}$ ... orthogonale Tangenten

c) $f_1'(x_{01}) = g_1'(x_{01})$ ... gemeinsame (parallele) Tangente(n)

$(x_{02} > x_{01})$

Aufstellung des Gleichungssystems für $g_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,;a,b,c,d \in R$

Nullstellen von f_1: $x_0 - x_0^2 = 0 \Rightarrow x_{01} = 0\,; x_{02} = 1$

Anstiege in den Nullstellen: $f_1'(x) = 1 - 2x \Rightarrow f_1'(1) = -1\,; f_1'(0) = 1$

Erste Ableitung: $g_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,;a,b,c \in R$

Gleichungssystem

(I)	$0 = d$	(g_1 verläuft durch den Ursprung)
(II)	$0 = a + b + c$	(zweite Nullstelle)
(III)	$1 = 3a + 2b + c$	(siehe b))
(IV)	$1 = c$	(siehe c))

$\Rightarrow a = 2\,; b = -3$