Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-0{,}25 \cdot x + 2}$.

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t_y an die Funktion für deren Schnittpunkt mit der y-Achse!
   Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion im positiv Unendlichen und stellen Sie die Funktion f und ihre Tangente t_y für das Intervall $0 \leq x \leq 10$ dar!
   Erläutern Sie anhand der Graphen den Unterschied zwischen einem linearen und einem exponentiellen Verminderungsprozess!

2. Der Graph von f, die Gerade $x = k$, $k > 0$ und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein.
   Bestimmen Sie den Flächeninhalt $A(k)$ dieser Fläche und untersuchen Sie $\lim\limits_{k \to +\infty} A(k)$ und geben Sie dessen Bedeutung an!

   Zeigen Sie, dass die von den Koordinatenachsen und der Tangente t_y eingeschlossene Fläche gerade die Hälfte des Flächeninhaltes unter dem Graphen von f für $x \geq 0$ ist!

3. Sei $P(a, b)$, $a > 0$ ein beliebiger Punkt auf dem Graphen der Funktion f. Die Tangente an den Graphen in diesem Punkt und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie denjenigen Punkt für den das beschriebene Dreieck gleichschenklig ist.

4. Sei $P(a, b)$, $a > 0$ wiederum ein beliebiger Punkt auf dem Graphen der Funktion f. Die Koordinatenachsen und deren Parallelen durch den Punkt P bilden ein Rechteck. Untersuchen Sie, ob der Umfang dieses Rechteckes extremal werden kann und geben Sie Art und Wert des Extremums an!

5. Eine allgemeine Bildungsvorschrift für einen Verminderungsprozess hat die Form $g(t) = e^{-k \cdot t + s}$.

   Bestimmen Sie die Prozessparameter k und s für folgende Prozessdaten!

   Zum Zeitpunkt $t = 0$ waren 200 Objekte vorhanden.
   Zum Zeitpunkt $t = 21$ waren nur noch 25 Objekte vorhanden.

   Bestimmen Sie den Zeitpunkte zu denen a) nur noch die Hälfte der anfangs vorhandenen Objekte bzw. b) nur noch 1% der anfangs vorhandenen Objekte existieren!

Kontrollergebnisse

1. Umformen: $f(x) = e^2 \cdot e^{-0,25 \cdot x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{e^2}{4} \cdot e^{-0,25 \cdot x}$
   $P_y(0;e^2), f'(0) = -\frac{e^2}{4} \Rightarrow t_y(x) = -\frac{e^2}{4}x + e^2$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, asymptotische Annäherung an die x-Achse
   Lineare Verminderung: In gleichen Intervallen Δx vermindert sich die Funktion immer um den gleichen Wert Δy.
   Exponentielle Verminderung: In gleichen Intervallen Δx vermindert sich die Funktion immer um den gleichen Faktor, d.h. die Verminderung Δy ist proportional dem Wert von y.
2. $A(k) = \int\limits_0^k f(x)\,dx = ... = 4e^2 \cdot \left(1 - e^{-025 \cdot k}\right)$, $\lim\limits_{k \to +\infty} A(k) = 4e^2$ ... endliche Fläche unter f(x)
   $A_{t_y} = \frac{1}{2} a \cdot b = 2e^2$ (Achsenabschnitte)
3. Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ...
   $\Rightarrow f'(a) = -1 \Rightarrow a = 4 \cdot (2 - \ln 4) = ... = 8 - 8\ln 2$, $b = 4$
4. Nebenbedingung: $f(a) = b = e^{-0,25 \cdot a + 2}$
   Zielfunktion: $u(a) = 2 \cdot \left(a + e^{-0,25a+2}\right)$; $a \in (0;\infty)$
   globales Minimum für $a = 4 \cdot (2 - \ln 4) = ... = 8 - 8\ln 2$, $b = 4$, $u_{min} = 8 \cdot (3 - \ln 4)$
5. $s = \ln 200$; $k = \frac{\ln 8}{21} = \frac{\ln 2}{7}$; $t_H = 7$; $t_{99\%} = \frac{\ln 100}{k} \approx 46,5$