Gegeben sei die Kurvenschar $f_k(x) = a_k x^3 + b_k x; k \neq 0; a_k, b_k \in R$

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Kurvenschar für folgende Bedingungen $f_k(3k) = 0$ und $f_k'(0) = k$!

   Kontrolle: $a = -\frac{1}{9k}$**;** $b = k$

2. Untersuchen Sie die Kurvenschar auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte

   Kontrolle: Punktsymmetrie, $P_y(0;0) = P_{x_1} = W$**,** $P_{x_{2/3}}(\pm 3k;0)$**,**

   $H(\sqrt{3} \cdot k; \frac{2}{\sqrt{3}} k^2)$**,** $T(-\sqrt{3} \cdot k; -\frac{2}{\sqrt{3}} k^2)$

3. Zeichnen Sie die Graphen für $k = 2, -6 \leq x \leq 6$ und für $k = -\frac{1}{2}, -3 \leq x \leq 3$!

4. Für jedes $k > 0$ bilden die Koordinatenachsen und deren Parallelen durch den Hochpunkt ein Rechteck. Der Graph von $f_k(x)$ teilt dieses Rechteck in zwei Teilflächen $A_1(k)$ und $A_2(k)$.
   Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der Teilflächen nicht von k abhängt!

   Kontrolle: $A_{Rechteck} = 2k^3, A_1(k) = \frac{5}{4}k^3, \; A_2(k) = \frac{3}{4}k^3, \; \frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}$

5. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Funktionen $f_2(x)$ und $f_{-0,5}(x)$ im Ursprung!
   Kontrolle: $\alpha = 90^\circ$

6. Begründen Sie, dass für jedes Paar von Parametern k_1 und $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ der Schnittwinkel zwischen den Graphen der dazugehörigen Funktionen im Ursprung 90° beträgt!

   Hinweis: Orthogonalität von Geraden im R^2

7. Berechnen Sie für $x \geq 0$ den Flächeninhalt zwischen den Graphen von $f_2(x)$ und $f_{-0,5}(x)$!

   Kontrolle: $A = \frac{45}{8} FE$

8. Die Graphen von k_1 und $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ schließen für $x \geq 0$ einen Flächeninhalt ein.

   Untersuchen Sie für welchen Wert von k_1 dieser Flächeninhalt extremal wird und geben Sie die Art und den Wert dieses Extremums an!

   Kontrolle: $A(k_1) = \frac{9}{4} \cdot \frac{k_1^2 + 1}{k_1}, k_{1E} = 1, \; A(1) = \frac{9}{4}$ ist lokales Minimum