Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = -x \cdot \ln x$. Ihr Graph sei G.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit der x-Achse.

Berechnen Sie Art und Lage der lokalen Extrempunkte des Graphen G.

Weisen Sie nach, dass G keine Wendepunkte besitzt.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie und ihr Verhalten für $x \to \infty$

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G an der Stelle x=3.

Zeichnen Sie den Graphen G und den Graphen der von t im Intervall $0<x\leq 4$.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{4}x^2$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Die Tangente t, der Graph G und die Parallele zur y-Achse durch den lokalen Extrempunkt von G schließen eine Fläche vollständig ein.
Kennzeichnen Sie diese Fläche in ihrem Koordinatensystem.
Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

Pflichtaufgaben Aufgabe 2

Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0 | 1 | 0), B(-1 | 0 | 1), C(-2 | 1 | -4), S(5 | 4 | 6) sowie die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; r \in R$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; s \in R$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte A, B und C eine Ebene E eindeutig festgelegt ist und der Punkt S nicht in dieser Ebene liegt.

Geben Sie jeweils eine Koordinatengleichung und eine Parametergleichung von E an.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide ABCS.

b) Weisen Sie nach, dass durch die Geraden g und h eindeutig eine Ebene F bestimmt wird, die nicht parallel zur Ebene E verläuft.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F und die Maßzahl des Schnittwinkels der beiden Ebenen.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 3
Stochastik

Bei einer Qualitätskontrolle in einem Werk für Solaranlagen wird ermittelt, dass 20% der produzierten Solarmodule nicht den angestrebten Qualitätsanforderungen entspricht.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der getesteten Solarmodule, die den Qualitätsanforderungen entspricht.

a) Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Solarmodulen
- weniger als 80 Solarmodule den Qualitätsanforderungen entsprechen,
- mehr als 75 und höchstens 90 den Qualitätsanforderungen entsprechen.

b) Berechnen Sie, wie viele Solarmodule mindestens gestestet werden müssen, damit unter ihnen mit mindestens 99%-iger Sicherheit, mindestens ein Solarmodul ist, welches nicht den Qualitätsanforderungen entspricht.

c) Durch Verbesserungen in der Produktion nimmt man an, dass der Anteil der defekten Solarmodule auf höchstens 10% gesenkt wird. Dazu werden 100 Solarmodule getestet.
Zeigen Sie, dass zur Testauswertung ein einseitiger Signifikanztest geeignet ist.
Berechnen Sie für die Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0{,}10$, den Ablehnungsbereich auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.1
Analysis

Ein Rohstoffbehälter für Flüssigkeiten besteht aus einem Zylinder, der beiderseits durch angesetzte Halbkugeln abgeschlossen ist.
Das Volumen des zylindrischen Teils beträgt 25 m³. Um Wärmeverluste möglichst gering zu halten, soll die Außenfläche des Behälters möglichst klein sein.
Bestimmen Sie den Radius r des Zylinders, für den Fall dass die gesamte Außenfläche des Behälters minimal wird.
Geben Sie die Höhe und das Volumen des Rohstoffbehälters an.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M(-4 | 4) und dem Radius r = 5 gegeben.
Ermitteln Sie eine Gleichung des Kreises k.
Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an den Kreis k in den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse.
An den Kreis k wird im 2. Quadranten eine Tangente t_3 parallel zur x-Achse gelegt.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks das von den Tangenten t_1, t_2 und t_3 gebildet wird.